Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»

2014/2015 год. Первый тур

Задачи для 5 класса

Пожалуйста, не забудьте обосновать ответы.

1. Назовём «тяжёлым» месяц, в котором пять понедельников. Сколько тяжёлых месяцев может быть в течение года?

2. Андрей перемножил две последовательные цифры и получил в итоге двузначное число, записываемое двумя последовательными цифрами. Найдите все такие примеры.

3. Саша зачеркнул на 25-й странице учебника все слова, в которых нет буквы А, потом он зачеркнул все слова, в которых нет буквы Б, а потом он нашёл все слова, где есть и буква О, и буква А, и тоже зачеркнул их. Костя на той же странице своего учебника зачеркнул слова, где нет Б, но есть А или О (возможно, обе сразу), и после этого он зачеркнул все слова, где нет ни буквы А, ни буквы О. Могло ли у Саши остаться незачёркнутыми больше слов, чем у Кости?

4. В каждом из двух классов по 30 учеников. Мальчиков в первом классе вдвое больше, чем во втором, а девочек — втрое меньше, чем во втором. Сколько мальчиков и девочек в каждом классе?

5. Три ручки, четыре карандаша и линейка вместе стоят 26 рублей, а пять ручек, шесть карандашей и три линейки — 44 рубля. Сколько стоят вместе две ручки и три карандаша?

6. Первоначально на доске написано число 1. Разрешается любое написанное на доске число умножить на 3 или переставить в нём цифры. Можно ли таким образом получить 999?

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»

2014/2015 год. Первый тур

Задачи для 6 класса

Пожалуйста, не забудьте обосновать ответы.

1. Назовём «тяжёлым» месяц, в котором пять понедельников. Сколько тяжёлых месяцев может быть в течение года?

2. Андрей перемножил две последовательные цифры и получил в итоге двузначное число, записываемое двумя последовательными цифрами. Найдите все такие примеры.

3. Саша зачеркнул на 25-й странице учебника все слова, в которых нет буквы А, потом он зачеркнул все слова, в которых нет буквы Б, а потом он нашёл все слова, где есть и буква О, и буква А, и тоже зачеркнул их. Костя на той же странице своего учебника зачеркнул слова, где нет Б, но есть А или О (возможно, обе сразу), и после этого он зачеркнул все слова, где нет ни буквы А, ни буквы О. Могло ли у Саши остаться незачёркнутыми больше слов, чем у Кости?

4. В каждом из двух классов по 30 учеников. Мальчиков в первом классе вдвое больше, чем во втором, а девочек — втрое меньше, чем во втором. Сколько мальчиков и девочек в каждом классе?

5. Три ручки, четыре карандаша и линейка вместе стоят 26 рублей, а пять ручек, шесть карандашей и три линейки — 44 рубля. Сколько стоят вместе две ручки и три карандаша?

6. Первоначально на доске написано число 1. Разрешается любое написанное на доске число умножить на 2 или переставить в нём цифры. Можно ли таким образом получить 209?

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»

2014/2015 год. Первый тур

Задачи для 7 класса

Пожалуйста, не забудьте обосновать ответы.

1. Назовём «тяжёлым» месяц, в котором пять понедельников. Сколько тяжёлых месяцев может быть в течение года?

2. Андрей перемножил две последовательные цифры и получил в итоге двузначное число, записываемое двумя последовательными цифрами. Найдите все такие примеры.

3. Сумма трёх натуральных чисел равна 100. Какое наименьшее возможное значение может принимать НОК этих чисел?

4. Докажите, что при любой расстановке чисел $1, 2, \ldots, 10$ по кругу найдутся три соседних числа с суммой не менее 18.

5. Три ручки, четыре карандаша и линейка вместе стоят 26 рублей, а пять ручек, шесть карандашей и три линейки — 44 рубля. Сколько стоят вместе две ручки и три карандаша?

6. Найдите наименьшее натуральное число, которое начинается на 11, заканчивается на 11 и делится на 7. Объясните, почему это число является наименьшим из удовлетворяющих условию.

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»

2014/2015 год. Первый тур

Задачи для 8 класса

1. Докажите, что для любого $n > 3$ существует n-угольник, у которого никакие две диагонали не параллельны.

2. BK — биссектриса треугольника ABC. Известно, что $AB = AC$, а $BC = AK + BK$. Найдите углы треугольника ABC.

3. Каждый из трёх землекопов, работая в одиночку, может вырыть траншею за целое число дней. А если ту же траншею они будут рыть все втроём, на это у них уйдёт соответственно на 2, 5 и 10 дней меньше, чем при рытье вдвоём (т.е. без первого, второго и третьего соответственно). За сколько дней может выкопать траншею самый медленный из них?

4. Даны 15 составных чисел, не превосходящих 2014. Докажите, что какие-то два из них имеют общий делитель, больший 1.

5. Дан квадрат 100×100 без угловой клетки. Можно ли разрезать его по клеткам на 33 фигуры, у которых одинаковые площади и одинаковые периметры?

6. В шестизначном числе поставили знак умножения после первых трёх цифр, и оказалось, что произведение двух полученных трёхзначных чисел в 7 раз меньше исходного числа. Какое число было написано?

7. Есть набор из N^2 карточек, на каждой карточке с одной стороны написано число, с другой стороны пусто. Написанные числа попарно различны. Эти карточки выложены в виде квадрата $N \times N$ пустой стороной (рубашкой) вверх. Разрешается перевернуть любую карточку и тем самым узнать написанное на ней число. Доказать, что не более чем за $8N$ переворачиваний можно найти карточку, число на которой меньше, чем число на каждой из соседних с ней (по стороне) карточек.

8. Назовем натуральное число возрастающим, если цифры в его записи идут в порядке строгого возрастания (например, числа 7 и 1589 — возрастающие, а 2447 — нет). Какое наименьшее количество возрастающих чисел надо сложить, чтобы получить 2014?

9. Найдите все натуральные a, b и c, для которых $2^a - 2^b - 2^{b+c} = 2014$.

10. В треугольнике ABC углы B и C равны 30°и 105°, а P — середина стороны BC. Найдите угол BAP.

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»

2014/2015 год. Первый тур

Задачи для 9 класса

1. Докажите, что для любого $n > 3$ существует n-угольник, у которого никакие две диагонали не параллельны.

2. Сумма трёх натуральных чисел равна 100. Какое наименьшее возможное значение может принимать НОК этих чисел?

3. Каждый из трёх землекопов, работая в одиночку, может вырыть траншею за целое число дней. А если ту же траншею они будут рыть все втроём, на это у них уйдёт соответственно на 2, 5 и 10 дней меньше, чем при рытье вдвоём (т.е. без первого, второго и третьего соответственно). За сколько дней может выкопать траншею самый медленный из них?

4. Андрей перемножил два последовательных натуральных числа и получил в некоторой системе счисления двузначное число, записываемое двумя последовательными цифрами, не превосходящими 9. Найдите эти цифры.

5. Дан квадрат 100×100 без угловой клетки. Можно ли разрезать его на 33 фигуры, у которых одинаковые площади и одинаковые периметры?

6. Найдите все натуральные a, b и c, для которых $2^a - 2^b - 2^{b+c} = 2014$.

7. В таблице 30×30 клеток поставлено 162 плюса и 144 минуса (в каждой клетке не более одного знака) так, что в каждой строке и каждом столбце таблицы стоит не более 17 знаков. Для каждого плюса подсчитали, сколько минусов находится в той же строке. Для каждого минуса подсчитали, сколько плюсов находится в том же столбце. Какое наибольшее значение может иметь сумма найденных чисел?

8. В треугольнике ABC выбрана точка D на стороне AB так, что углы ACD и ABC равны. Пусть S — центр описанной окружности треугольника BCD. Докажите, что точки A, C, S и середина BD лежат на одной окружности.

9. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ таковы, что $\sin A = \cos A_1$, $\sin B = \cos B_1$, $\sin C = \cos C_1$. Какие значения может принимать наибольший из шести углов?

10. Пусть H — такая точка внутри треугольника ABC, что $\angle HAB = \angle HCB$ и $\angle HBC = \angle HAC$. Докажите, что H — точка пересечения высот треугольника ABC.

Международная математическая олимпиада «Формула Единства» / «Третье тысячелетие» 2014/2015 год. Первый тур

Задачи для 10 класса

1. Выберите на каждой стороне квадрата по одной точке так, чтобы образованный ими четырёхугольник имел наименьший периметр.

2. Каждый из трёх землекопов, работая в одиночку, может вырыть траншею за целое число дней. А если ту же траншею они будут рыть все втроём, на это у них уйдёт соответственно на 2, 5 и 10 дней меньше, чем при рытье вдвоём (т.е. без первого, второго и третьего соответственно). За сколько дней может выкопать траншею самый медленный из них?

3. Андрей перемножил два последовательных натуральных числа и получил в некоторой системе счисления двузначное число, записываемое двумя последовательными цифрами, не превосходящими 9. Найдите эти цифры.

4. Костя выписал на доску 30 последовательных членов арифметической прогрессии с разностью 2061. Докажите, что в ней содержится не более 20 точных квадратов.

5. Вещественные числа x и y таковы, что $x^4y^2 + x^2 + 2x^3y + 6x^2y + 8 \leqslant 0$. Докажите, что $x \geqslant -\frac{1}{6}$.

6. Решите систему уравнений в целых числах:
$$\begin{cases} 2^a + 3^b = 5^b, \\ 3^a + 6^b = 9^b \end{cases}$$

7. Маша красит клетки белой доски 10×10. Она может покрасить любой вертикальный ряд клеток синей краской или любой горизонтальный ряд красной краской (каждый ряд красят не более одного раза). Если синяя краска ложится поверх красной, получается синяя клетка, а если красная поверх синей, то краски вступают в реакцию и обесцвечиваются, получается белая клетка. Может ли на доске оказаться 33 красных клетки?

8. В треугольнике ABC выбрана точка D на стороне AB так, что углы ACD и ABC равны. Пусть S — центр описанной окружности треугольника BCD. Докажите, что точки A, C, S и середина BD лежат на одной окружности.

9. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ таковы, что $\sin A = \cos A_1$, $\sin B = \cos B_1$, $\sin C = \cos C_1$. Какие значения может принимать наибольший из шести углов?

10. Решите уравнение в простых числах: $100q + 80 = p^3 + q^2$.

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»

2014/2015 год. Первый тур

Задачи для 11 класса

1. Каждый из трёх землекопов, работая в одиночку, может вырыть траншею за целое число дней. А если ту же траншею они будут рыть все втроём, на это у них уйдёт соответственно на 2, 5 и 10 дней меньше, чем при рытье вдвоём (т.е. без первого, второго и третьего соответственно). За сколько дней может выкопать траншею самый медленный из них?

2. Андрей перемножил два последовательных натуральных числа и получил в некоторой системе счисления двузначное число, записываемое двумя последовательными цифрами, не превосходящими 9. Найдите эти цифры.

3. Костя выписал на доску 30 последовательных членов арифметической прогрессии с разностью 2061. Докажите, что в ней содержится не более 20 точных квадратов.

4. Вещественные числа x и y таковы, что $x^4y^2 + x^2 + 2x^3y + 6x^2y + 8 \leqslant 0$. Докажите, что $x \geqslant -\frac{1}{6}$.

5. Маша красит клетки белой доски 10×10. Она может покрасить любой вертикальный ряд клеток синей краской или любой горизонтальный ряд красной краской (каждый ряд красят не более одного раза). Если синяя краска ложится поверх красной, получается синяя клетка, а если красная поверх синей, то краски вступают в реакцию и обесцвечиваются, получается белая клетка. Может ли на доске оказаться 33 красных клетки?

6. Можно ли утверждать, что $\log_{\sqrt{a}}(a+1) + \log_{a+1}\sqrt{a} \geqslant \sqrt{6}$ при $a > 1$?

7. Докажите, что количество способов разрезать прямоугольник 200×3 на домино (прямоугольники 1×2) делится на 3.

8. Случайным образом выбираются три числа от 1 до N (возможно, совпадающие) и располагаются в порядке возрастания. С какой вероятностью они образуют арифметическую прогрессию?

9. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ таковы, что $\sin A = \cos A_1$, $\sin B = \cos B_1$, $\sin C = \cos C_1$. Какие значения может принимать наибольший из шести углов?

10. Пусть $d(k)$ — число делителей натурального числа k, а квадратные скобки означают целую часть вещественного числа. Докажите, что числа $d(1) + d(2) + \ldots + d(n)$ и $[\sqrt{n}]$ имеют одинаковую чётность.